



فصل نامه علوم و مهندسی گرمسار

Journal Homepage: <https://journal.fmgarmsar.ac.ir/>



دانشگاه گرمسار

مقاله کامل پژوهشی

تحلیل ارتعاشات و تنش دینامیکی در تیرهای جدار نازک با سطح مقطع متغیر

محمد رضا احسانی فر*، دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اردکان، اردکان، ایران

حامد درویش گوهری، استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اردکان، اردکان، ایران

مسعود رهائی فرد، دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اردکان، اردکان، ایران

تاریخچه مقاله:

دریافت: ۱۴۰۴/۰۶/۱۱

پذیرش: ۱۴۰۴/۱۱/۲۵

چکیده

با توجه به گسترش نیاز به طراحی سازه‌های سبک، مقاوم و کارآمد در صنایع پیشرفته‌ای مانند هوافضا، انرژی‌های تجدیدپذیر و خودروسازی، تحلیل دقیق رفتار دینامیکی سازه‌هایی مانند تیرهای جدار نازک با مقطع متغیر، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این پژوهش، تحلیل ارتعاشات و تنش‌های دینامیکی تیرهای جدار نازک با سطح مقطع متغیر به روش رایلی-ریتز مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور مدل‌سازی دقیق هندسه تیر، توابع چندجمله‌ای برای توزیع ضخامت و قطر در راستای طول تیر در نظر گرفته شده‌اند. با به کارگیری روش رایلی-ریتز، ماتریس‌های جرمی و سختی به صورت نیمه تحلیلی استخراج و معادلات ارتعاشی به دست آمده‌اند. سپس، پاسخ دینامیکی تیر تحت بارگذاری گسترده سینوسی محاسبه و تنش خمشی در امتداد تیر ارزیابی شده است. برای بهینه‌سازی هندسه تیر با هدف کاهش هم‌زمان تنش بیشینه و جرم سازه، از الگوریتم ژنتیک NSGA-II استفاده شده و مجموعه‌ای از طرح‌های بهینه بر روی جبهه پارتو استخراج گردیده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که طراحی مناسب تابع ضخامت و قطر به کمک الگوریتم بهینه‌سازی، می‌تواند به طور هم‌زمان تنش‌های دینامیکی را کاهش داده و وزن سازه را به صورت مؤثری کم کند. هم‌چنین، مقایسه پاسخ‌های عددی با نتایج نرم‌افزار ABAQUS، تطابق بسیار مناسبی را نشان می‌دهد که اعتبار روش پیشنهادی را تأیید می‌نماید. این روش می‌تواند به عنوان ابزاری کارآمد در طراحی سازه‌های سبک و مقاوم در کاربردهایی نظیر صنعت هوافضا، انرژی‌های تجدیدپذیر و خودروسازی مورد استفاده قرار گیرد.

کلیدواژه‌ها:

تیرهای جدار نازک،

مقطع متغیر،

تحلیل ارتعاشی،

تنش دینامیکی،

بهینه‌سازی چندهدفه،

الگوریتم NSGA-II.

عهده دار مکاتبات: محمد رضا احسانی فر

نشانی: ایران، اردکان، دانشگاه اردکان - کدپستی: ۹۵۴۹۱۸۹۵۱۸

پیام نگار: mohammadrezaehsanifar2000@gmail.com

۱- مقدمه

تیرهای جدار نازک مقطع متغیر به دلیل قابلیت‌های برجسته‌ای که در طراحی‌های پیشرفته ارائه می‌دهند، به‌طور فزاینده‌ای در صنایع پیشرفته مورد توجه قرار گرفته‌اند. این سازه‌ها به دلیل ترکیب بی‌نظیر استحکام و سبکی، برای مهندسان و طراحان صنعتی یک انتخاب برتر محسوب می‌شوند. در صنایعی که محدودیت‌های وزنی و استحکام مکانیکی از نکات کلیدی هستند، مانند صنعت هوافضا، خودروسازی و انرژی‌های تجدیدپذیر، تیرهای جدار نازک نقشی اساسی در بهبود عملکرد و بهره‌وری ایفا می‌کنند. برای مثال، در صنعت هوافضا، کاهش وزن قطعات بدون کاهش مقاومت ساختاری، به‌طور مستقیم بر مصرف سوخت و افزایش کارایی هواپیما یا موشک تأثیر دارد. هم‌چنین در توربین‌های بادی، تیرهای جدار نازک با مقطع متغیر در ساخت پره‌ها و پایه‌ی توربین به دلیل تحمل بارهای دینامیکی و ارتعاشات بالا به‌کار می‌روند. علاوه بر کاربردهای گسترده تیرهای جدار نازک در صنایع هوافضا، خودروسازی و صنعت انرژی‌های تجدیدپذیر، این سازه‌ها در زیرساخت‌های شهری و ساختمان‌های پیشرفته نیز نقشی اساسی دارند. تحلیل دقیق ارتعاشی و رفتار دینامیکی این سازه‌ها می‌تواند به طراحی ایمن‌تر و مقاوم‌تر در برابر زلزله و نیروهای خارجی متغیر کمک کند.

با توجه به ویژگی‌های مکانیکی خاص این سازه‌ها، تحلیل دقیق ارتعاشی و تنش دینامیکی تیرهای جدار نازک، یکی از مهم‌ترین چالش‌ها در طراحی سازه‌های ایمن، سبک و کارآمد است. تحلیل‌های ارتعاشی نه‌تنها برای اطمینان از پایداری سازه‌ها ضروری هستند، بلکه در بهینه‌سازی عملکرد آنها تحت بارهای مختلف، از جمله بارگذاری‌های دینامیکی و نیروهای محیطی، نقش اساسی دارند.

در این پژوهش، به تحلیل ارتعاشات آزاد و تنش‌های دینامیکی تیرهای جدار نازک با مقطع متغیر مخروطی با کمک روش راییلی - ریتز پرداخته شده است. روش راییلی -

ریتز به دلیل ماهیت مبتنی بر انرژی خود، یکی از روش‌های قابل اطمینان در مدل‌سازی و حل مسائل پیچیده ارتعاشی سازه‌ها به‌شمار می‌رود. این روش در تحلیل‌های مهندسی به دلیل سرعت محاسبات بالا و دقت مناسب، به‌ویژه در سازه‌های پیچیده که دارای شرایط مرزی غیرمعمول هستند، جایگاه ویژه‌ای پیدا کرده است.

روش راییلی - ریتز مبتنی بر اصل حداقل انرژی پتانسیل کل است که یکی از اصول بنیادی در مکانیک کلاسیک به‌شمار می‌رود. طبق این اصل، یک سیستم مکانیکی در حالتی قرار می‌گیرد که انرژی پتانسیل کل آن به حداقل برسد. در روش راییلی - ریتز، انرژی پتانسیل و جنبشی سازه بر حسب توابع پایه تعریف می‌شوند که به صورت ترکیب خطی از مقادیر مجهول (که معمولاً ضرایب یا پارامترهای مجهول هستند) بیان می‌شود. این توابع پایه باید به‌گونه‌ای انتخاب شوند که شرایط مرزی سازه را به خوبی تامین کنند [۱].

یکی از مزایای کلیدی روش راییلی - ریتز، امکان انتخاب گسترده توابع پایه است. این انعطاف‌پذیری باعث می‌شود تا این روش بتواند مسائل پیچیده با شرایط مرزی مختلف را حل کند. با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل، معادلات حاکم بر سازه به صورت یک سیستم معادلات خطی به‌دست می‌آید. با حل این سیستم، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی سیستم تعیین می‌شود که اطلاعات ارزشمندی را درباره رفتار دینامیکی سازه فراهم می‌کند.

برای اعتبارسنجی نتایج حاصل از محاسبات، مدل‌سازی عددی تیر مذکور در نرم‌افزار آباکوس انجام شده است.

اهدافی که از انجام این پژوهش دنبال می‌شود شامل توسعه یک روش عددی کارآمد و دقیق برای تحلیل ارتعاشی و تنش دینامیکی تیرهای جدار نازک با مقطع متغیر، بررسی تأثیر پارامترهای هندسی بر مقدار جابجایی و میزان تنش در تیر، ارزیابی پاسخ دینامیکی تیر تحت بارگذاری‌های مختلف و تعیین تنش‌های حداکثری و هم‌چنین ارائه راهکارهایی برای بهبود طراحی و بهینه‌سازی این نوع سازه‌ها می‌باشد.

معرفی کردند که تعامل بین ارتعاشات خمشی و پیچشی را در نظر می‌گیرد و منجر به نمایش دقیق‌تری از رفتار عناصر تیر می‌شود [۲]. آیدُقدو^۲ و همکاران (۲۰۰۷)، به بررسی تحلیل ارتعاشات تیرهای جدار نازک با استفاده از روش اجزای محدود پرداختند. آن‌ها با استفاده از مدل‌های تحلیلی، به دنبال بررسی رفتار دینامیکی این نوع سازه‌ها تحت شرایط بارگذاری مختلف بودند. نتایج پژوهش آن‌ها نشان می‌دهد که افزایش تغییرات در ضخامت و هندسه مقطع، تأثیر زیادی بر پاسخ دینامیکی و فرکانس‌های طبیعی تیر دارد. هم‌چنین، این پژوهش تأکید می‌کند که مدل‌سازی دقیق این ساختارها برای پیش‌بینی بهتر ارتعاشات ضروری است [۳]. ایرانی و سازش (۲۰۱۳)، به تحلیل ارتعاش تصادفی تیر کنسولی با مقطع متغیر تحت تحریک تصادفی پرداختند. آن‌ها با استفاده از روش‌های تحلیلی و عددی، رفتار دینامیکی تیر کنسولی با مقطع مخروطی تحت تحریک تصادفی را بررسی کردند و به نتایج تحلیلی مربوط به توابع پاسخ فرکانسی، میزان انرژی جذب‌شده و طیف توان ارتعاشی دست یافته‌اند. نتایج پژوهش آن‌ها نشان می‌دهد که تغییرات در مقطع تیر تأثیر بسزایی بر پاسخ ارتعاشی آن دارد و به‌طور خاص، تیرهایی که دارای مقطع متغیر هستند، حساسیت بیشتری به تحریک‌های تصادفی نشان می‌دهند. این موضوع باعث می‌شود پیش‌بینی دقیق‌تر ارتعاشات تیرها برای جلوگیری از پدیده‌های ناخواسته نظیر خستگی و شکست سازه ضروری باشد [۴]. سلطانی و آهنیان (۲۰۲۱)، به تحلیل ارتعاشات آزاد و پایداری خمشی - پیچشی تیرهای جدار نازک با مقطع مخروطی متغیر و ساخته شده از مواد مدرج تابعی (FGM) پرداختند. برای مدل‌سازی، تیر به صورت یک تیر جدار نازک با مقطع متغیر در طول در نظر گرفته شده و مواد مدرج تابعی به‌گونه‌ای تعریف شده‌اند که خواص مکانیکی به‌طور تدریجی در طول تیر تغییر می‌کنند. هم‌چنین، از تئوری تیرهای جدار نازک و روش انرژی برای به‌دست آوردن

نتایج حاصل از این پژوهش می‌تواند در طراحی بهینه‌تر سازه‌های مختلف صنعتی استفاده شود. به‌عنوان نمونه، در طراحی توربین‌های بادی که پایه‌ی آن نمونه مناسبی برای کاربرد این پژوهش است (شکل ۱)، استفاده از روش رایلی - ریتز در بهینه‌سازی پره‌ها و پایه‌های توربین می‌تواند به کاهش تنش‌های دینامیکی و افزایش عمر مفید سازه کمک کند. هم‌چنین در شفت‌های انتقال قدرت و سازه‌های عمرانی که تحت بارهای دینامیکی شدید قرار دارند، تحلیل‌های دقیق ارتعاشی و تنش‌های دینامیکی می‌تواند منجر به طراحی سازه‌های ایمن‌تر و کارآمدتر شود.



شکل ۱- توربین بادی

پره‌ها و پایه‌ی توربین‌های بادی به دلیل بارهای دینامیکی بالا و تغییرات سریع نیروی باد، نیاز به تحلیل‌های دقیق ارتعاشی دارند. نتایج این پژوهش می‌تواند به بهبود طراحی پایه‌ها و کاهش تنش‌های مکانیکی در این سازه‌ها کمک کند.

بنرجی و ویلیامز^۱ (۱۹۲۰)، ماتریس سختی دینامیکی جهت ارتعاش وابسته‌ی خمشی - پیچشی تیر تیموشنکو را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها یک فرمول کوپل شده را

¹ Banerjee and Williams

² Aydogdu

محاسباتی مؤثر باشد [۷]. پرادان و چاکراورتی (۲۰۱۴)، ارتعاشات آزاد تیر از جنس مواد هدفمند را بررسی نمودند. آنها برای حل معادلات حاکم از روش رایلی - ریتز استفاده کردند. نتایج نشان می‌دهد که فرکانس‌های طبیعی تیر با ترتیب تئوری تغییرشکل برشی افزایش می‌یابد. تئوری تیموشنکو نتایج دقیقی برای تیرهای ضخیم ارائه می‌دهد، در حالی که تئوری‌های مرتبه بالاتر برای تیرهای نازک دقیق‌تر هستند [۸].

۲- روش تحقیق

۲-۱- مقدمه

این بخش به بررسی و تحلیل معادلات بنیادی که پایه‌گذار تحلیل‌های ارتعاشی و تنش دینامیکی تیر جدار نازک مقطع متغیر هستند، اختصاص یافته است.

۲-۲- تشریح مسئله

در این پژوهش، رفتار ارتعاشی یک تیر جدار نازک با مقطع متغیر مورد بررسی قرار گرفته است. این تیر جدار نازک دارای مقطع دایره‌ای است که شعاع آن به تدریج در طول تیر کاهش می‌یابد و در انتها به شکل یک مخروط ناقص خاتمه می‌یابد که یک نیروی گسترده سینوسی به آن اعمال می‌شود (شکل ۲). مشخصات تیر مورد پژوهش در جدول ۱ قابل مشاهده است.

۲-۳- تابع شکل

مطابق با شکل ۲ از یک سمت گیردار (انتهای تیر) و از سمت دیگر آزاد است.

در سمت گیردار، تیر به صورت کامل مهار شده و هیچ‌گونه جابجایی یا چرخشی در این نقطه مجاز نیست.

معادلات حاکم بر ارتعاشات و پایداری استفاده کردند. نتایج پژوهش آن‌ها نشان می‌دهد که پارامترهای مختلفی هم‌چون تغییرات مقطع، توزیع مواد مدرج تابعی، شرایط مرزی و خواص بستر الاستیک تأثیر قابل توجهی بر فرکانس‌های طبیعی و پایداری خمشی - پیچشی تیرها دارند. تیرهایی که دارای مقطع مخروطی و مواد مدرج تابعی هستند، پایداری بیشتری نسبت به تیرهای معمولی دارند [۵]. غنبری و عادل‌خوانی (۲۰۲۴)، به تحلیل ارتعاشات آزاد عرضی تیرهای دوار با مقاطع متغیر با استفاده از روش نقطه‌ای کالوکیشن^۱ پرداختند. آن‌ها با معرفی یک مدل ریاضی که تأثیرات سرعت چرخش، توزیع جرم و هندسه مقطع متغیر را در نظر می‌گیرد، به صورت دقیق ارتعاشات این تیرها را بررسی کردند. آنها از روش کالوکیشن نقطه‌ای برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم استفاده و به بررسی تأثیر تغییرات پارامترهای مختلف هندسی و دینامیکی بر فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات پرداختند. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که تغییرات در هندسه مقطع و سرعت چرخش تأثیر بسزایی بر فرکانس‌های طبیعی آن دارند. افزایش سرعت چرخش منجر به افزایش فرکانس‌های طبیعی می‌شود، در حالی که کاهش ضخامت مقطع تیر باعث کاهش فرکانس‌ها می‌گردد [۶]. جیا و استوارت^۲ (۲۰۰۱)، به تحلیل روش رایلی - ریتز برای تقریب زیرفضاهای ویژه^۳ در مسائل مقادیر ویژه^۴ پرداختند. آنها بر جنبه‌های نظری این روش تمرکز کرده و به بررسی شرایط و محدودیت‌های آن در تعیین مقادیر ویژه و بردارهای ویژه^۵ پرداخته‌اند. این تحلیل بر اساس ویژگی‌های ریاضیاتی و ساختارهای ماتریسی انجام شده و درک بهتری از عملکرد روش رایلی - ریتز در تخمین فضاهای ویژه در سیستم‌های بزرگ ارائه می‌دهد. تحلیل‌های انجام شده تأیید می‌کنند که روش رایلی - ریتز می‌تواند در حل مسائل پیچیده

¹ Collocation Method

² Jia and Stewart

³ Eigenspace

⁴ Eigenvalue

⁵ Eigenvectors

خمشی تیر اویلر- برنولی استخراج می‌شود:

$$EI(x) \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 + \rho A(x) \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right)^2 = 0$$

در این رابطه A ، مساحت و ρ ، چگالی و E ، مدول یانگ و I ، ممان دوم سطح می‌باشد.

۲-۴- ماتریس سختی و جرمی

در روش رایلی- ریتز، ماتریس سختی و ماتریس جرمی با استفاده از توابع شکل تعریف می‌شوند که رفتار جابجایی و تغییر شکل تیر را توصیف می‌کند. برای بیان این ماتریس‌ها، ابتدا باید توابع شکل فرضی برای جابجایی تیر استفاده شود. سپس، این توابع در معادلات انرژی پتانسیل و جنبشی جای‌گذاری شده و معادلات نهایی به‌صورت ماتریسی بیان شود. در ادامه، ماتریس‌های جرمی و سختی به‌صورت روابط ۱ و ۲ محاسبه می‌شوند.

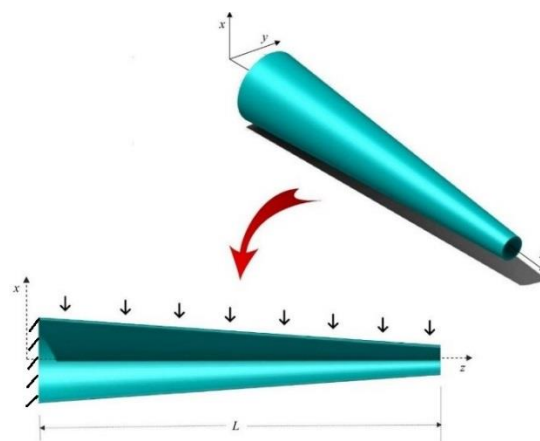
$$M_{ij} = \int_0^l \rho A \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \quad (\text{رابطه ۱})$$

$$K_{ij} = \int_0^l EI \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx \quad (\text{رابطه ۲})$$

جدول ۱- مشخصات تیر مورد پژوهش با مقطع متغیر

پارامتر	مقدار	واحد
طول تیر	۳	meter
قطر بزرگتر	۰/۵	meter
قطر کوچکتر	۰/۲	meter
ضخامت تیر	۰/۰۱	meter
مدول الاستیسیته E	2.07×10^9	Pascal
چگالی فولاد ρ	۷۸۰۰	Kg/m ³
ضریب پواسون ν	۰/۳	-
فرکانس تحریک ω	۱/۶	Hz
دامنه نیرو گسترده F_0	۱۰۰۰	N

این به معنای آن است که در این انتها، هر دو جابجایی عمودی و چرخش تیر صفر است. در سمت آزاد، هیچ تکیه‌گاه یا قیدی وجود ندارد و تیر می‌تواند آزادانه در این نقطه جابجا شود و چرخش کند. در نتیجه، نیروی برشی و ممان خمشی در این نقطه باید صفر باشند.



شکل ۲- طرح برش خورده تیر مورد پژوهش

با توجه به شرایط مرزی تیر، تابع شکل مناسب، تابعی است که شرایط مرزی تیر را به خوبی ارضا کند و هم‌چنین شرایط اضافی به مساله اعمال نکند. این تابع از معادله

روش رایلی- ریتز از رابطه ۳ استفاده می‌شود:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \quad (\text{رابطه ۳})$$

۲-۵- فرکانس‌های طبیعی

جهت به‌دست آوردن فرکانس‌های طبیعی سیستم به کمک

سیستم بوده و به کمک آن فرکانس‌های طبیعی و مودهای ارتعاشی سیستم محاسبه می‌شوند. شکل مودهای اول تا ششم به‌دست آمده در شکل ۳ قابل مشاهده است.

$$[D] = [K]^{-1}[M] \quad (\text{رابطه ۴})$$

مقادیر ویژه نیز به کمک رابطه زیر به‌دست می‌آیند:

$$([D] - \lambda_n[I])\{C_n\} = \{0\} \quad (\text{رابطه ۵})$$

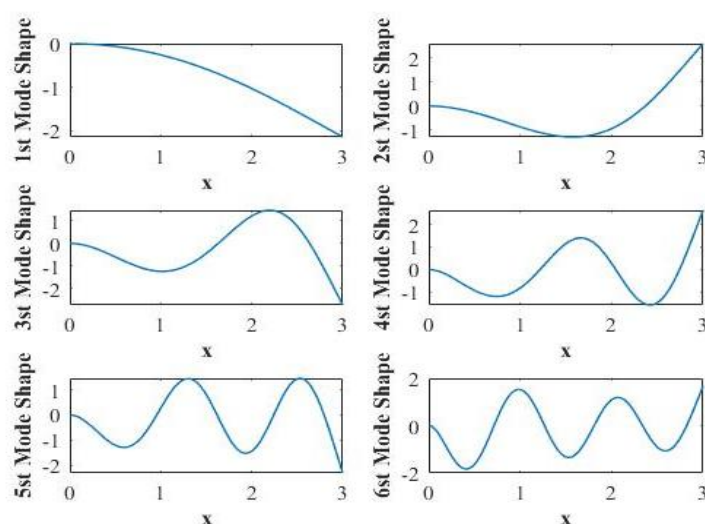
λ_n مقادیر ویژه، I ماتریس همانی و C_n بردارهای ویژه هستند.

که در آن ω_n فرکانس‌های طبیعی و λ_n مقادیر ویژه می‌باشند. در زیر فرکانس طبیعی به‌دست آمده برای مود اول تا ششم قابل مشاهده است:

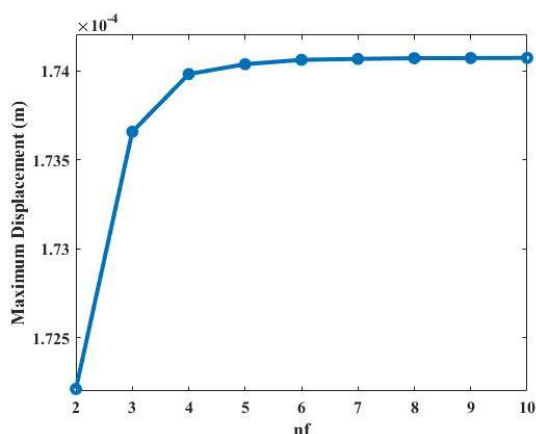
$$\omega_1 = 392, \omega_2 = 1725, \omega_3 = 4330, \\ \omega_4 = 8253, \omega_5 = 13722, \omega_6 = 23037$$

۶-۲- تشکیل ماتریس [D] و محاسبه مقادیر ویژه

در روش رایلی- ریتز، ماتریس [D] معمولاً به عنوان ماتریسی تعریف می‌شود که شامل اطلاعات دینامیکی



شکل ۳- شکل مودهای اول تا ششم تیر یکسر گیردار



شکل ۴- نمودار هم‌گرایی

۷-۲- محاسبه پاسخ زمانی و بررسی هم‌گرایی

تحلیل هم‌گرایی یکی از مراحل کلیدی در ارزیابی دقت روش‌های عددی است. هدف از این تحلیل، بررسی رفتار پاسخ‌های سیستم در برابر تغییر پارامترهای عددی، مانند تعداد توابع پایه یا گام‌های محاسباتی و اطمینان از پایداری و صحت نتایج است. هم‌گرایی نشان می‌دهد که با افزایش دقت محاسبات، نتایج به مقادیر واقعی نزدیک می‌شوند. الگوریتم هم‌گرایی در شکل ۴ قابل مشاهده است.

این رابطه مشابه رویکرد سری فوریه است که در آن یک تابع به کمک توابع پایه متعامد تجزیه می‌شود و در نهایت پاسخ زمانی را از رابطه‌ی ۷ به دست می‌آید:

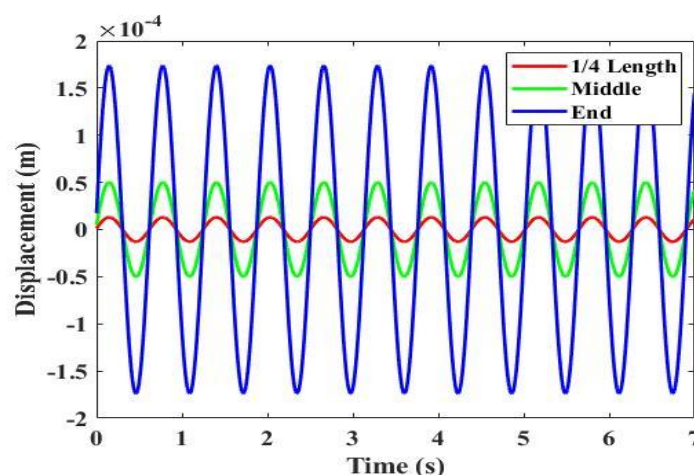
$$W = q \times \{C_n\} \quad (\text{رابطه ۷})$$

که در این رابطه $\{C\}$ بردار ویژه ماتریس $[D]$ می‌باشد. نمودار پاسخ سیستم در سه نقطه مورد بررسی قرار گرفته است. در نقطه یک چهارم ابتدایی تیر، در وسط تیر و در انتهای تیر که در شکل ۵ قابل مشاهده می‌باشد.

در این پژوهش، برای بررسی هم‌گرایی، تأثیر تعداد توابع پایه در روش رایلی- ریتز بر مقدار جابجایی بیشینه تیر تحلیل شده است. در شکل ۴ نمودار حاصل شان می‌دهد که با افزایش تعداد توابع پایه، مقدار جابجایی به تدریج به یک مقدار ثابت میل می‌کنند.

جهت محاسبه پاسخ زمانی، ابتدا با توجه به شرایط بارگذاری پاسخ مخصوص هر مود (q) با استفاده از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$q = \int_0^L \varphi \times F \quad (\text{رابطه ۶})$$



شکل ۵- پاسخ زمانی در سه نقطه مختلف تیر

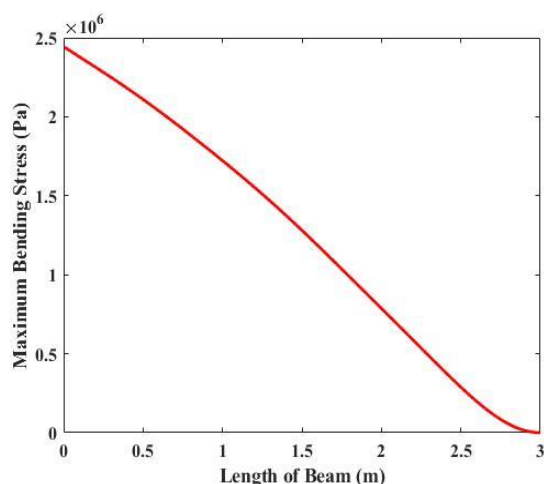
همان‌طور که در شکل قابل مشاهده است، جابجایی در نقطه انتهای تیر در بیشترین مقدار خود قرار دارد.

۸-۲- تنش دینامیکی

در این پژوهش تنش دینامیکی تیر به کمک روش رایلی- ریتز به صورت نیمه تحلیلی و با استفاده از رابطه‌ی ۸ محاسبه می‌شود:

$$\sigma(x, t) = -EZ \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{رابطه ۸})$$

در این رابطه E ، مدول الاستیسیته و z ، فاصله از محور خشی می‌باشد. نمودار مقدار بیشینه تنش خمشی در شکل ۶ قابل مشاهده است.



شکل ۶- نمودار دامنه تنش خمشی در طول تیر

رایلی- ریتز و تحلیل نرم‌افزاری است. به عبارت دیگر، مقایسه نتایج این دو روش نشان می‌دهد که روش رایلی- ریتز توانسته است نتایج دقیقی مشابه با تحلیل‌های پیچیده‌تر نرم‌افزاری فراهم کند. این تطابق و هم‌راستایی میان نتایج عددی و نرم‌افزاری موجب افزایش اعتماد به دقت و کارایی روش رایلی- ریتز در تحلیل‌های دینامیکی تیر می‌شود. بنابراین، استفاده از این روش در تحلیل‌های ارتعاشی تیرها می‌تواند به‌عنوان یک ابزار مؤثر و قابل اعتماد در تحلیل‌های ساختاری در نظر گرفته شود.

۳- بهینه‌سازی تیر

۳-۱- مقدمه

بهینه‌سازی یکی از شاخه‌های مهم در علوم مهندسی و طراحی است که هدف آن یافتن بهترین ترکیب از پارامترهای طراحی برای رسیدن به عملکرد مطلوب می‌باشد. در مسائل مهندسی، اغلب با محدودیت‌هایی نظیر محدودیت‌های هندسی، مکانیکی، یا اقتصادی مواجه است که ضرورت بهینه‌سازی را دوچندان می‌کند. بهینه‌سازی مهندسی به معنای یافتن مجموعه‌ای از پارامترها است که ضمن تامین قیود مسأله، عملکرد سیستم را از دید یک یا چند هدف به حداکثر یا حداقل ممکن رساند.

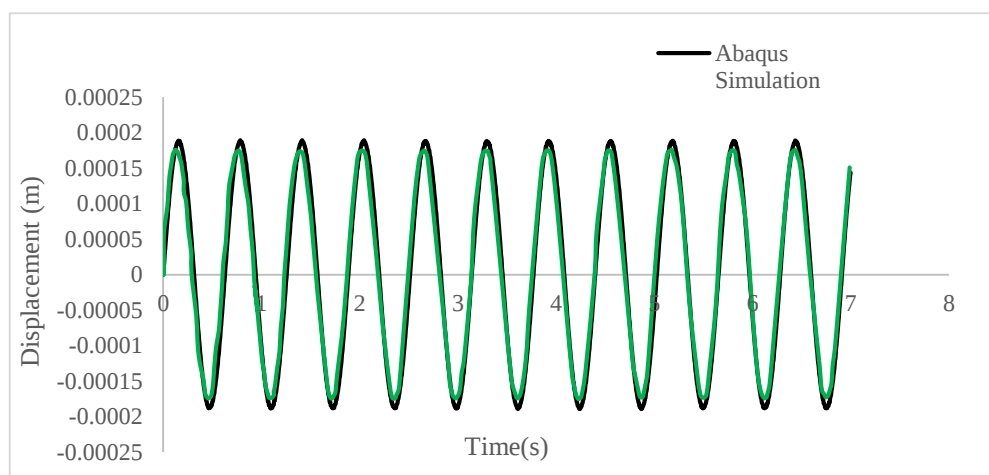
همان‌طور که در شکل قابل مشاهده است، تمرکز تنش در ابتدای تیر که سمت گیردار می‌باشد بیشتر بوده و به‌صورت نزولی، با نزدیک شدن به انتهای آزاد تیر نزدیک، تمرکز تنش کاهش می‌یابد تا جایی که به صفر می‌رسد.

۲-۹- اعتبارسنجی

برای ارزیابی دقت و اعتبار نتایج به‌دست‌آمده از روش رایلی- ریتز، مقایسه‌ای میان این روش عددی و یک روش تحلیلی معتبر انجام شده است.

نتایج این تحلیل‌ها با نتایج به‌دست‌آمده از روش رایلی- ریتز مقایسه شده و تطابق آنها مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقایسه، نمودار جابجایی انتهای تیر که با استفاده از نرم‌افزار آباکوس محاسبه شده همراه با نتیجه به‌دست آمده به روش رایلی- ریتز، در شکل ۷ ارائه شده است.

میزان جابه‌جایی بیشینه در نقطه انتهای تیر در حل عددی به روش رایلی- ریتز برابر با 1.74×10^{-4} است. هم‌چنین، این مقدار در تحلیل تحلیلی با استفاده از نرم‌افزار آباکوس برابر با 1.85×10^{-4} به‌دست آمده است. این مقادیر نشان‌دهنده اختلافی معادل ۶٪ میان دو روش حل با شرایط یکسان هستند. این اختلاف کوچک به‌طور واضحی نشان‌دهنده تطابق خوب میان نتایج به‌دست‌آمده از روش



شکل ۷- مقایسه جابجایی بر حسب زمان در نقطه انتهای تیر در حل عددی و تحلیلی

مجموعه‌ای از جواب‌های غیرمغلوب (پارتو) را به صورت هم‌زمان تولید کند. از این‌رو، این الگوریتم به جای ارائه یک پاسخ منفرد، مجموعه‌ای از گزینه‌های بهینه را ارائه می‌دهد که می‌توانند بسته به نیازهای طراحی انتخاب شوند.

در ساختار این الگوریتم، ابتدا یک جمعیت اولیه از پاسخ‌ها تولید می‌شود. هر پاسخ (یا کروموزوم) شامل متغیرهای طراحی (مانند ضرایب تابع ضخامت و قطر تیر) است. پس از ارزیابی توابع هدف (وزن و تنش)، پاسخ‌ها بر اساس نادرتر بودن مرتب می‌شوند. سپس، با استفاده از اپراتورهای ترکیب و جهش، نسل جدیدی از پاسخ‌ها ایجاد می‌شود. در هر نسل، پاسخ‌های برتر از نظر رتبه‌ی پارتو و تنوع جمعیت حفظ می‌شوند. این روند تا رسیدن به هم‌گرایی یا تعداد نسل‌های مشخص ادامه می‌یابد.

از آنجا که کاهش وزن و کاهش تنش به صورت هم‌زمان اهداف متضادی هستند، نتایج حاصل از NSGA-II مجموعه‌ای از راه‌حل‌های متعادل^۳ را فراهم کرده که می‌توان بر اساس اولویت‌های طراحی یا الزامات عملکردی، گزینه نهایی را از میان آن‌ها انتخاب کرد.

متغیرهای طراحی: در این پژوهش، توزیع ضخامت و قطر بیرونی تیر به صورت چندجمله‌ای درجه سوم نسبت به طول تیر مدل‌سازی شده‌اند که در زیر قابل مشاهده هستند.

$$T(x) = t_0 + t_1x + t_2x^2 + t_3x^3$$

$$D(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3$$

هم‌چنین در پیاده‌سازی الگوریتم، از تنظیمات اولیه مطابق جدول ۲ استفاده شده است.

توابع هدف: در این پژوهش، فرآیند بهینه‌سازی با هدف کاهش وزن کل سازه و کاهش بیشینه تنش خمشی ناشی از بارگذاری دینامیکی صورت گرفته است. بدین منظور، دو تابع هدف مستقل تعریف شده‌اند: یکی برای

در طراحی سازه‌ها، دو عامل وزن سازه و مقدار تنش‌های ایجادشده نقش مهمی در عملکرد نهایی دارند. وزن زیاد باعث افزایش هزینه ساخت و حمل‌ونقل می‌شود و هم‌چنین ممکن است بار اضافی به سازه وارد کند. از طرفی، اگر تنش در بخش‌هایی از سازه زیاد باشد، ممکن است باعث خرابی یا کاهش عمر مفید آن شود. از این‌رو، دستیابی به یک طراحی که بتواند هم‌زمان با کاهش وزن، تمرکز تنش در تکیه‌گاه را کاهش دهد، یک چالش مهم در مهندسی به‌شمار می‌رود.

۳-۲- الگوریتم ژنتیک^۱

الگوریتم ژنتیک یک روش جست‌وجو و بهینه‌سازی مبتنی بر اصول ژنتیک طبیعی و انتخاب طبیعی است. این الگوریتم برای اولین بار توسط جان هالند^۲ (۱۹۷۵) معرفی شد و با الهام از تکامل بیولوژیکی، راهکاری قدرتمند برای حل مسائل پیچیده و غیرخطی فراهم می‌کند که در آن‌ها اطلاعات دقیق ریاضیاتی مانند مشتقات، پیوستگی تابع هدف یا وجود فقط یک کمینه محلی در دسترس نیست.

الگوریتم ژنتیک برخلاف بسیاری از روش‌های کلاسیک، با یک جمعیت از جواب‌ها و نه فقط با یک نقطه، به‌طور هم‌زمان کار می‌کند. این ویژگی باعث می‌شود احتمال گیر افتادن در کمینه‌های محلی کاهش یابد و احتمال یافتن جواب بهینه‌ی سراسری بیشتر شود [۹].

۳-۳- رویکرد و مراحل بهینه‌سازی NSGA-II

در این پژوهش، از الگوریتم ژنتیک چندهدفه‌ی NSGA-II برای بهینه‌سازی هم‌زمان وزن و تنش سازه استفاده شده است.

این الگوریتم با بهره‌گیری از مفاهیم تکامل طبیعی، از جمله انتخاب طبیعی، تقاطع و جهش، قادر است

^۱ Genetic Algorithm

^۲ John Holland

^۳ Trade-off Solutions

به طراح کمک می‌کند تا تعادل‌های مختلف میان وزن و تنش را مشاهده کرده و بر اساس نیازهای فنی یا محدودیت‌های پروژه، بهترین گزینه را انتخاب کند.

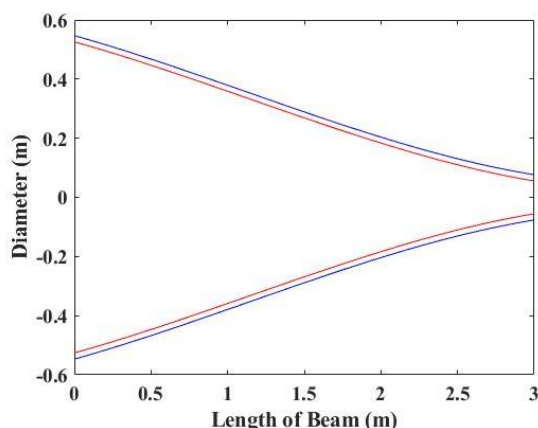
با توجه به نمودار مرز پارتو، نقطه شماره ۴ به عنوان گزینه‌ی بهینه‌تر انتخاب می‌شود، زیرا این نقطه از نظر هندسی، کمترین فاصله را تا نقطه ایده‌آل^۱ دارد. نقطه ایده‌آل، نقطه‌ای فرضی در فضای اهداف است که در آن تمامی اهداف در بهترین حالت ممکن قرار دارند (یعنی وزن و تنش در کمترین مقدار خود هستند). در بهینه‌سازی چندهدفه، نقطه‌ای که کمترین فاصله اقلیدسی را به این نقطه‌ی ایده‌آل دارد، به عنوان بهینه‌ترین انتخاب تلقی می‌شود، زیرا توازن مناسبی بین اهداف برقرار کرده است. در این حالت، نقطه ۴ توانسته است وزن سازه را به میزان ۱۴ درصد کاهش دهد، در حالی که هم‌زمان مقدار تنش را نیز به میزان ۲۰ درصد بهینه کرده است.

توابع قطر و ضخامت بهینه شده در این نقطه عبارت‌اند از:

$$T(x) = 0.01047 - 0.00029x - 0.00010x^2 + 0.00007x^3$$

$$D(x) = 0.54694 - 0.14550x - 0.03164x^2 + 0.00929x^3$$

هم‌چنین نمودار تغییرات بهینه قطر در طول تیر در شکل ۹ قابل مشاهده است.



شکل ۹- نمایش تغییرات بهینه قطر در امتداد طول تیر

کمینه‌سازی جرم تیر و دیگری برای کمینه‌سازی تنش خمشی حداکثر در طول تیر. روابط ریاضی این توابع در رابطه زیر ارائه شده است.

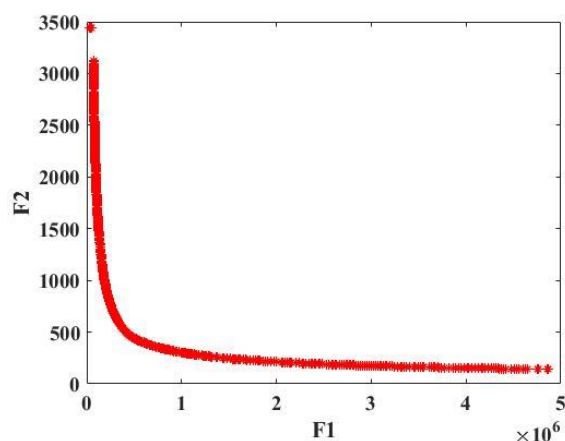
$$F_1 = \int_0^L \frac{\pi}{4} [D^2 - (D - 2T)^2] \rho dx \quad (\text{رابطه ۹})$$

$$F_2 = \max_{x \in [0, L]} |\sigma(x, t)| \quad (\text{رابطه ۱۰})$$

۳-۴- نتایج بهینه‌سازی

پس از اجرای الگوریتم NSGA-II و طی کردن هزار نسل، مجموعه‌ای از پاسخ‌های غیرمغلوب (پارتو- بهینه) حاصل شده است. این پاسخ‌ها نشان‌دهنده تعادل‌های مختلف بین وزن سازه (جرم تیر) و تنش خمشی هستند. خروجی نهایی به صورت یک مجموعه از طرح‌ها ارائه می‌شود که در آن‌ها، هیچ طرحی وجود ندارد که هم‌زمان در هر دو هدف از بقیه بهتر باشد؛ بلکه هر طرح نسبت به دیگری در یک هدف برتری دارد و در دیگری ضعیف‌تر است. این ویژگی، مشخصه اصلی مرز پارتو است.

در شکل ۸ مرز پارتو به وضوح قابل مشاهده است.



شکل ۸- نمایش جبهه پرتو بهینه براساس کمینه وزن و تنش

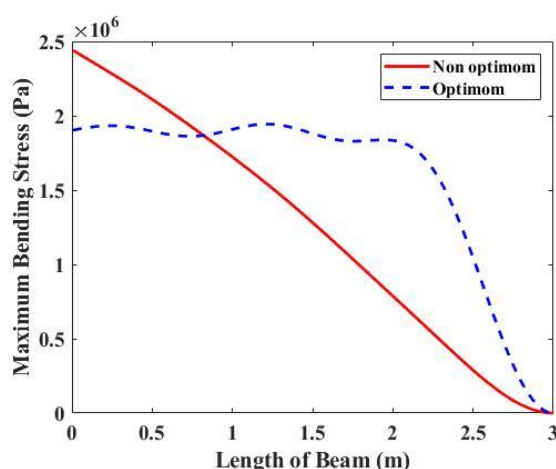
محور عمودی این نمودار، وزن سازه و در محور افقی میزان تنش بیشینه در سازه دیده می‌شوند. نمودار مرز پرتو

^۱ Ideal Point

جدول ۲- تنظیمات اولیه بهینه‌سازی

مقدار	اندازه جمعیت		حداکثر تکرار		احتمال تقاطع		احتمال جهش	
	۸۰۰		۱۰۰۰		۰/۷		۰/۳	
متغیر طراحی	t ₀	t ₁	t ₂	t ₃	d ₀	d ₁	d ₂	d ₃
کران پایین	۰/۰۰۲	-۰/۰۳	-۰/۰۳	-۰/۰۳	۰/۱	-۰/۰۳	-۰/۰۳	-۰/۰۳
کران بالا	۰/۱	۰/۰۳	۰/۰۳	۰/۰۳	۱	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳

بهینه‌سازی می‌باشد.



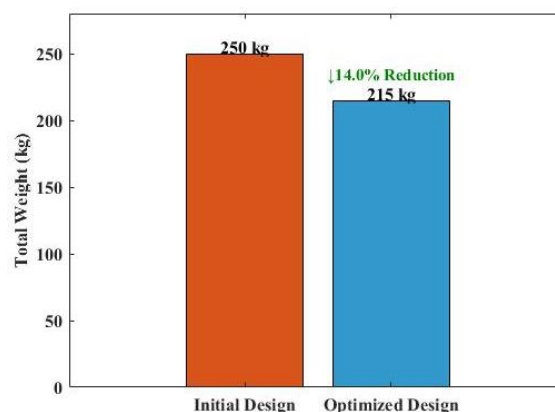
شکل ۱۱- مقایسه توزیع تنش خمشی در حالت بهینه و غیربهینه

۴- نتیجه‌گیری

نتایج حاصل از تحلیل‌های انجام‌شده، نشان‌دهنده اعتبار و دقت روش رایلی- ریتز در مقایسه با نرم‌افزارهای تحلیلی عددی است. مقایسه تطبیقی نتایج به‌دست‌آمده از روش رایلی- ریتز با خروجی‌های نرم‌افزار آباکوس، صحت و دقت بالای این روش را در تحلیل ارتعاشات و تنش‌های دینامیکی تیرهای جدار نازک با مقطع متغیر تأیید می‌کند. از مزایای این روش می‌توان به سرعت بالای محاسباتی آن اشاره کرد که امکان بررسی دقیق‌تر رفتار دینامیکی تیرهای پیچیده را با هزینه محاسباتی کمتر نسبت به روش‌های عددی فراهم می‌سازد.

به‌منظور بهینه‌سازی رفتار تنشی و کاهش احتمال خرابی‌های ناشی از خستگی، یک برنامه بهینه‌سازی برای

در این نمودار، خط قرمز نمایانگر قطر داخلی و خط آبی نشان‌دهنده قطر خارجی تیر است. فاصله بین این دو خط، بیانگر ضخامت تیر در هر نقطه از طول آن می‌باشد. در شکل ۱۰، مقایسه وزن تیر در دو حالت بهینه‌شده و بهینه‌نشده قابل مشاهده است.



شکل ۱۰- مقایسه وزن تیر قبل و بعد از بهینه‌سازی

هم‌چنین در شکل ۱۱ مقایسه‌ای بین تنش بهینه‌نشده و تنش بهینه‌شده نمایش داده شده است.

شکل ۱۱ تنش خمشی را در دو حالت طراحی اولیه (غیربهینه) و طراحی بهینه‌شده مقایسه می‌کند. نتایج نشان می‌دهد که در طرح بهینه‌شده با استفاده از الگوریتم NSGA-II، توزیع تنش بیشینه در طول تیر یکنواخت‌تر شده و تمرکز تنش در ناحیه ابتدایی تیر به‌طور محسوسی کاهش یافته است. این تغییرات نشان‌دهنده بهبود عملکرد مکانیکی سازه در برابر بارگذاری خمشی و اثربخشی فرآیند

- [3] M.C. Ece, M. Aydogdu, V. Taskin, Vibration of a variable cross-section beam, *Mech. Res. Commun.* 34 (2007) 78-84.
- [4] S. Irani, S. Sazesh, Random vibration of cantilever tapered beam under stochastic excitation, *Modares Mech. Eng.* 13 (2013) 138-154.
- [5] M. Soltani, A. Ahanian, Free vibration and flexural-torsional stability analyses of axially functionally graded tapered thin-walled beam resting on elastic foundation, *Amirkabir J. Mech. Eng.* 53 (2021) 3587-3614.
- [6] J. Ghanbari, R. Adelkhani, Analysis of transverse free vibrations of rotating beams with variable cross-section using the point collocation method, *Int. J. Comput. Methods Eng. Sci. Mech.* 25 (2024) 193-207.
- [7] Z. Jia, G.W. Stewart, An analysis of the Rayleigh-Ritz method for approximating eigenspaces, *Math. Comput.* 70 (2001) 637-647.
- [8] K.K. Pradhan, S. Chakraverty, Effects of different shear deformation theories on free vibration of functionally graded beams, *Int. J. Mech. Sci.* 82 (2014) 149-160.
- [9] K. Deb, *Optimization for Engineering Design: Algorithms and Examples*, 2nd ed., PHI Learning Pvt. Ltd., New Delhi, 2012.

تعیین بهترین توزیع ضخامت و قطر در طول تیر توسعه داده شد. نتایج این بهینه‌سازی نشان داد که با افزایش ضخامت در نواحی بحرانی تنش و کاهش ضخامت در نواحی کم تنش، می‌توان ضمن حفظ وزن ثابت سازه، هزینه‌های ساخت را کاهش داده و توزیع تنش را یکنواخت‌تر کرد. هم‌چنین، در راستای بهینه‌سازی قطر، می‌توان آن را به‌صورت یک تابع مناسب (مانند تابع خطی، درجه سوم یا توابع پیچیده‌تر) تعریف کرد تا توزیع تنش در طول تیر بهبود یابد. در نهایت، با ترکیب بهینه ضخامت و قطر در هر مقطع، امکان دستیابی به توزیع تنشی بهینه و کاهش تمرکز تنش در نواحی بحرانی فراهم می‌شود که به افزایش عمر و بهبود عملکرد مکانیکی سازه منجر خواهد شد.

منابع

- [1] S.S. Rao, *Mechanical Vibrations*, 5th ed., Pearson, Boston, 2017.
- [2] J.R. Banerjee, F.W. Williams, Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix for Timoshenko beam elements, *Comput. Struct.* 42 (1992) 301-310.